Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică
algebră
geometrie

Soluțiile testelor de autoevaluare
pot fi consultate la adresa:
https://www.edituraparalela45.ro/download/solutii_teste_de_autoevaluare_consolidare_clasa8_p1_2019-2020.pdf

clasa a VIII-a
partea I
ediția a VIII-a

mate 2000 – consolidare

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Cuprins

Algebră

Capitolul I
Numere reale

PP Competenţe specifice

C1. Identificarea în exemple, în exerciţii sau în probleme a numerelor reale şi a formulelor de calcul prescurtat

C2. Utilizarea în exerciţii a definiţiei intervalelor de numere reale şi reprezentarea acestora pe axa numerelor

C3. Alegerea formei de reprezentare a unui număr real şi utilizarea de algoritmi pentru optimizarea calculului cu numere reale

C4. Folosirea terminologiei aferente noţiunii de număr real (semn, modul, opus, invers, parte întreagă, parte fracţionară) în contexte variate

C5. Deducerea şi aplicarea formulelor de calcul prescurtat pentru optimizarea unor calcule

PE-PP 1. Mulţimi de numere. Forme de scriere a unui număr

Mulțimea numerelor naturale, notată cu $\mathbb{N}$, este $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots n; \dots\}$.

Observaţii:

a) Mulțimea notată cu $\mathbb{N}^*$ este $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots n; \dots\}$ şi $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

b) Avem, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$, că:

i) $x + y \in \mathbb{N}$, $x \cdot y \in \mathbb{N}$, şi **consecințele**: $x + y = 0$ înseamnă $x = y = 0$, iar $x \cdot y = 1$ înseamnă $x = y = 1$.

ii) $x - y \in \mathbb{N}$ numai dacă $\boldsymbol{x \geq y}$, iar $x : y \in \mathbb{N}$ numai dacă **există** $z \in \mathbb{N}$ astfel încât $y \cdot z = x$. Dacă acest lucru nu are loc, se foloseşte teorema **împărțirii cu rest** $x = yz + t$, cu $t \in \mathbb{N}$, $0 \leq t < y$, $y \neq 0$.

iii) $x^y \in \mathbb{N}$, cu excepția cazului 0^0.

Mulțimea numerelor întregi, notată cu $\mathbb{Z}$, este

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -n; \dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; n; \dots\}.$$

Observații:

a) $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; în plus, se definesc: $\mathbb{Z}_- = \{\ldots; -n; \ldots; -3; -2; -1\}$ și $\mathbb{Z}_+ = \{1; 2; \ldots; n; \ldots\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Avem că $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$ și, în plus, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$$

b) Avem, pentru $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$, că:

i) $x + y \in \mathbb{Z}, x - y \in \mathbb{Z}, x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

ii) Dacă $x^2 + y^2 = 0$, atunci $x = y = 0$.

iii) $x : y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ dacă și numai dacă există $z \in \mathbb{Z}$ cu $x = y \cdot z$. În caz contrar, $x = yz + t$, unde $t \in \mathbb{Z}$ și $0 \leq |t| < |y|$.

Mulțimea numerelor raționale, notată cu $\mathbb{Q}$, este:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid \text{există } y, z \in \mathbb{Z}, z \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{y}{z}\right\}.$$

Observații:

a) Avem că $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, iar mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ se numește mulțimea numerelor raționale **neîntregi**. De asemenea, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

b) Un **număr rațional** este reprezentat de o fracție de forma $\frac{x}{y}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ și $y \in \mathbb{Z}^*$. Vom numi **fracție** o pereche de numere întregi x, y, cu $y \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{x}{y}$. Două fracții $\frac{x}{y}$ și $\frac{z}{t}$, cu $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$, $y \cdot t \neq 0$, se numesc **fracții echivalente** dacă $xt = yz$. Dată o fracție $\frac{x}{y}$, se obțin fracții echivalente cu ea prin:

i) **amplificare**: $^{t)}\frac{x}{y} = \frac{x \cdot t}{y \cdot t}$, cu $x, y, t \in \mathbb{Z}$, $y \cdot t \neq 0$;

ii) **simplificare**: $\frac{x}{y}^{(t} = \frac{x : t}{y : t}$, cu $x, y, t \in \mathbb{Z}$, $y \cdot t \neq 0$; $t \mid x$ și $t \mid y$.

O **fracție** $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, se numește **fracție ireductibilă** dacă $(x, y) = 1$.

Un **număr rațional** care are ca **reprezentant** o fracție $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, se scrie sub formă **zecimală** împărțind numărătorul x la numitorul y.

În funcție de factorii în care se descompune numitorul b al fracției ireductibile $\frac{x}{y}$, fracția zecimală poate fi:

i) **fracție zecimală finită**, dacă numitorul conține în descompunerea sa numai **factori de 2** sau/și **numai** factori de **5**;

ii) **fracție zecimală periodică simplă**, dacă descompunerea numitorului în produs de **factori** primi conține **alți** factori decât **2** și **5**;

iii) **fracție zecimală periodică mixtă**, dacă descompunerea numitorului în produs de factori primi conține factori de 2 sau/și numai factori de 5, cât și un alt factor prim.

Reciproc: Dacă un număr rațional este reprezentat printr-o **fracție zecimală**, el poate fi transformat sub formă de **fracție ordinară** folosind **reguli de transformare** pentru fiecare tip de fracție zecimală:

i) **fracție zecimală finită**: $\overline{a,b_1b_2b_3...b_n} = \dfrac{\overline{ab_1b_2b_3...b_n}}{10^n}$;

ii) **fracție zecimală periodică simplă**: $\overline{a,(b_1b_2b_3...b_n)} = a\dfrac{\overline{b_1b_2b_3...b_n}}{9^n}$;

iii) **fracție zecimală periodică mixtă**: $\overline{a,b_1b_2...b_k(c_1c_2...c_l)} = a\dfrac{\overline{b_1b_2...b_kc_1c_2...c_l}-\overline{b_1b_2...b_k}}{\underbrace{99...9}_{l\text{ cifre}}\underbrace{00...0}_{k\text{ cifre}}}$.

c) Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$, avem că $x + y \in \mathbb{Q}$, $x - y \in \mathbb{Q}$, $x \cdot y \in \mathbb{Q}$, $x : y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$, $x^p \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, $p \in \mathbb{Z}$.

Mulțimea numerelor iraționale, notată cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, este mulțimea numerelor care se scriu zecimal cu o **infinitate** de zecimale care **nu se repetă** periodic.

Mulțimea numerelor reale, notată $\mathbb{R}$, este mulțimea formată din **reuniunea** mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale. În mod asemănător, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Avem **șirul de incluziuni** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exerciții rezolvate:

1. Se dă numărul $\dfrac{32}{15}$.

a) Scrieți numărul sub formă zecimală.
b) Stabiliți care este a 23-a zecimală a fracției.
c) Comparați cifra miimilor cu cifra zecimilor.

32,000 : 15 = 2,133...
30
=20
15
=50
45
=50
45
=5

Soluție:

a) $\dfrac{32}{15} = 2{,}1(3)$.

b) a 23-a zecimală este 3.

c) $1 < 3$.

2. Fie mulțimea $A = \left\{\dfrac{8}{-4};\ \sqrt{0{,}(4)};\ \dfrac{-15}{-3};\ -\sqrt{12};\ \sqrt{0{,}(2)};\ +\sqrt{4};\ 3;\ \sqrt{5\dfrac{4}{9}}\right\}$.

Determinați mulțimile: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, $A - \mathbb{Z}$, $A - \mathbb{Q}$ și $A - \mathbb{R}$.

Soluție:

Mulțimea A se mai scrie:

$A = \left\{-2;\ \dfrac{2}{3};\ 5;\ -2\sqrt{3};\ \dfrac{\sqrt{2}}{3};\ +2;\ 3;\ \dfrac{7}{3}\right\}$; $A \cap \mathbb{N} = \{2; 3; 5\}$; $A \cap \mathbb{Z} = \{-2; 2; 3; 5\}$;

Capitolul I
Relații între puncte, drepte și plane

PP **Competenţe specifice**

C1. Recunoaşterea şi descrierea unor proprietăţi ale unor figuri geometrice plane în configuraţii date în spaţiu sau pe desfăşurări ale acestora

C2. Identificarea unor elemente ale figurilor geometrice plane în configuraţii geometrice spaţiale date

C3. Folosirea instrumentelor geometrice adecvate pentru reprezentarea prin desen, în plan, a corpurilor geometrice

C4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării descrierii configuraţiilor spaţiale

C5. Utilizarea proprietăţilor referitoare la drepte şi unghiuri în spaţiu pentru analizarea poziţiilor relative ale acestora

C6. Exprimarea prin reprezentări geometrice a noţiunilor legate de drepte şi unghiuri în plan şi în spaţiu

C7. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării descrierii configuraţiilor spaţiale şi în vederea optimizării calculelor de lungimi de segmente şi de măsuri de unghiuri

C8. Interpretarea reprezentărilor geometrice şi a unor informaţii deduse din acestea, în corelaţie cu determinarea unor lungimi de segmente şi a unor măsuri de unghiuri

C9. Clasificarea corpurilor geometrice după anumite criterii date sau alese

C10. Transpunerea unei situaţii-problemă în limbaj geometric, rezolvarea problemei obţinute şi interpretarea rezultatului

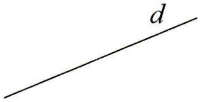
PE-PP 1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei

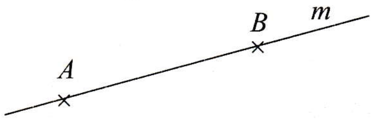
Punctul, **dreapta** şi **planul** fac parte din noțiunile de bază ale geometriei în spațiu. Ele sunt noțiuni primare: nu se definesc, dar pot fi descrise.

Punctul. Se reprezintă prin atingerea vârfului unui creion bine ascuțit de foaia de scris: •, ×. Se notează cu litere mari: A, B, C, …

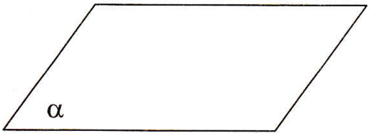
Dreapta. Este formată din puncte și se reprezintă printr-un fir de ață foarte subțire întins la nesfârșit în ambele sensuri. Se notează cu litere mici: a, b, d, …

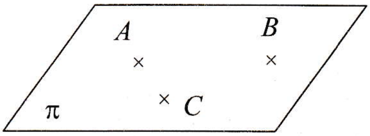
Dacă punctele A și B sunt pe o dreaptă, atunci putem nota dreapta cu AB.





Planul. Poate fi asemănat cu suprafața liniștită a unei ape. De asemenea, planul este nesfârșit în toate direcțiile. Se notează cu litere din alfabetul grec: α, β, γ, π, … Un plan care conține trei puncte necoliniare A, B și C se notează prin (ABC). Planul se reprezintă printr-un paralelogram.

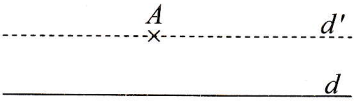




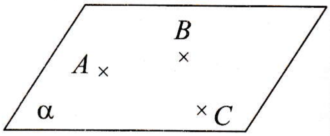
Propoziții despre puncte, drepte și plane

P$_1$. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una. Orice dreaptă are cel puțin două puncte distincte.

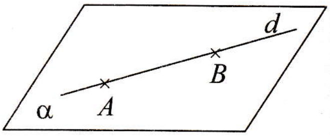
P$_2$. (**Axioma paralelelor** sau **Postulatul lui Euclid**). Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă și numai una la acea dreaptă.



P$_3$. Fiind date trei puncte necoliniare, există un plan și numai unul care să le conțină. Într-un plan există cel puțin trei puncte necoliniare.

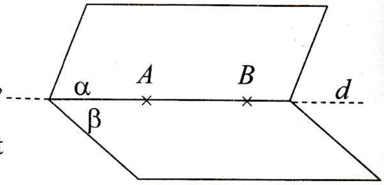


P$_4$. Dacă două puncte distincte A și B sunt situate într-un plan, atunci dreapta determinată de ele are toate punctele în acel plan.

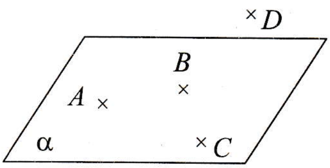


P$_5$. Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele mai au cel puțin încă un punct comun.

Consecință: Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o dreaptă comună.



P$_6$. Există patru puncte nesituate în același plan (acestea se numesc **necoplanare**).



Problemă rezolvată:

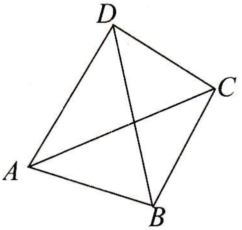
1. Se consideră punctele A, B, C, D necoplanare, oricare trei dintre puncte fiind necoliniare.

a) Determinați câte drepte se pot obține unindu-le două câte două.

b) Dacă $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 84\ \text{cm}^2$, d$(A, BC) = 14$ cm și d$(D, BC) = 15$ cm, calculați $\mathcal{A}_{\Delta BCD}$.

Soluție:

a) Dreptele sunt: AB, AC, AD, BC, BD și CD, deci 6 drepte.



b) $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \dfrac{BC \cdot \text{d}(A, BC)}{2}$; $84 = \dfrac{BC \cdot 14}{2} \Rightarrow BC = 12$ cm.

$\mathcal{A}_{\Delta BCD} = \dfrac{BC \cdot \text{d}(D, BC)}{2} \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta BCD} = \dfrac{12 \cdot 15}{2} \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta BCD} = 90\ \text{cm}^2$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

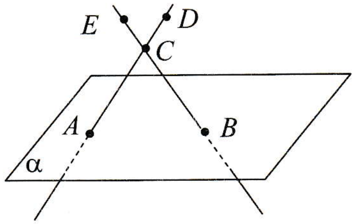
1. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) Trei puncte necoliniare determină un …………….. .
b) Prin două puncte distincte trece o …………….. și numai una.
c) Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o …………….. comună.
d) Patru puncte necoplanare determină …………….. drepte.

2. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a) Oricare trei puncte sunt coplanare.
b) Patru puncte coliniare sunt coplanare.
c) Dacă două plane au două puncte comune, atunci ele au o dreaptă comună.
d) Patru puncte, dintre care oricare trei sunt coliniare, determină o dreaptă.

3. Scrieți toate dreptele determinate de punctele date în figura de mai jos.



PE Aplicare şi exersare **

4. Fiind date patru puncte A, B, C și D, stabiliți câte drepte se pot obține unindu-le două câte două în fiecare din situațiile:

a) oricare trei dintre puncte sunt necoliniare;
b) trei dintre puncte sunt coliniare;
c) punctele sunt necoplanare.

5. a) Câtor drepte poate să le aparțină un punct dat?
b) Câtor plane pot să le aparțină două puncte distincte date?

Indicații și răspunsuri

RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

1. Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale

ALGEBRĂ

Testul 1: 1. a) 3; b) 2; c) 4; d) 1; e) 2. **2.** a) $m_a = 25$; $m_g = 24$; b) $m_a = 37{,}5$; $m_g = 36$; c) $m_a = 7\sqrt{3}$; $m_g = 12$; d) $m_a = \sqrt{3}$; $m_g = \sqrt{2}$. **3.** a) $S = \{3\}$; b) $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$; c) $S = \{-6; 2\}$; d) $S = \{-3; 9\}$. **4.** 200 lei. **5.** a) 39; b) 8. **6.** a) $3x(x+1)^2$; b) $(x+1)(4x-3)$; c) $(x-2)(x+4)$; d) $(x+2)(x+4)$; e) $(x-2)(x-6)$; f) $(x-2)(x+2)(x+3)$. **7.** $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 9\}$.

Testul 2: 1. a) $\frac{13}{14} < \frac{14}{15}$; b) $-\frac{3}{4} > -\frac{4}{5}$; c) $0{,}2 < 0{,}(2)$; d) $-0{,}5 > -0{,}(5)$; e) $0{,}1(2) > 0{,}(12)$; f) $-0{,}3(4) < -0{,}(34)$. **2.** a) $a = b = 4$; b) $a = b = 4$. **3.** $A \cap \mathbb{Q} = \left\{-2{,}5;\ -3{,}5(6);\ \frac{19}{4};\ \frac{31}{12}\right\}$; $A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \left\{\frac{\sqrt{11}}{2};\ \sqrt{17};\ -2\sqrt{3};\ \sqrt{5}\right\}$. **4.** a) $m_a = 8{,}7$; $m_g = 6$; b) $m_a = \frac{5\sqrt{6}}{2}$; $m_g = 6$; c) $m_a = 3$; $m_g = \sqrt{3}$; d) $m_a = 2\sqrt{2}$; $m_g = 2$. **5.** a) -4; b) 36; c) $-\frac{5}{2}$. **6.** 320 lei. **7.** Ecuațiile au aceeași soluție. a) $x = 1$; b) $x = 4$; c) $x = 6$.

Testul 3: 1. a) F; b) A; c) A; d) F; e) F; f) F. **2.** $A \cap \mathbb{Q} = \left\{-7{,}3;\ 5;\ \frac{2}{3};\ -5{,}(2);\ \frac{10}{3};\ -\frac{17}{3}\right\}$. **3.** a) $S = \{-14\}$; b) $S = \{7\}$; c) $x \in \{-4; 2\}$; d) $x \in \{-8; -2\}$. **4.** 18 fete și 12 băieți. **5.** $a = 7x - 5$; a) $x = 1$; b) $x \in \left\{-\frac{4}{7};\ 2\right\}$; c) $x \in \left\{\frac{4}{7};\ \frac{6}{7}\right\}$; d) $x = 3$. **6.** a) -3; b) $4\frac{1}{4}$; c) $3\sqrt{3}$.

Testul 4: 1. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{4}$; c) 1. **2.** a) $x \in \{-4; 4\}$; b) $x \in \{-5; 7\}$; c) $x \in \{-3\sqrt{3};\ 5\sqrt{3}\}$; d) $x \in \{-6; 6\}$. **3.** 300 lei. **4.** a) Fracția simplificată este $x + 1$ și cum $x \in \mathbb{N}^*$, atunci $x + 1 \in \mathbb{N}^*$; b) $x + 3 \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\ x \in \mathbb{N}^*$. **5.** a) $S = \{-8\}$; b) $S = \{5\}$; c) $S = \{-4; 2\}$; d) $S = \{-\sqrt{2};\ 3\sqrt{2}\}$. **6.** a) 6; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) -5. **7.** $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $B = \{-12, -3, 0, 1, 2, 3, 6, 15\}$; $A \cap B = \{-3, 1, 2, 3, 6\}$.

Testul 5: 1. a) $a < b$; b) $a > b$; c) $a > b$; d) $a < b$. **2.** a) $a = 1$; $b = 9$; b) $m_a = 5$; $m_g = 3$. **3.** a) $n = 25$; b) $n = 1$; c) $n = 11$. **4.** 240 lei, rest 96 lei. **5.** a) $S = \{-2\}$; b) $S = \{1; 7\}$; c) $S = \{-4\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}\}$; d) $S = \{-2\sqrt{2} - 1;\ 1\}$. **6.** Card$(A \cap \mathbb{Q}) = 5$. **7.** a) $(x-2)(x-7)$; b) $(x+2)(x-8)$; c) $(x+1)(3x-1)$; d) $(x+2)(x-3)(x+3)$; e) $(x+3)(5+y)$; f) $(x+4)(x+7)$.

Testul 6: 1. a) $a = b = 1$; b) $a = b = 3$. **2.** $A = \{-13; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 8\}$; $B = \{-6; -3; -2; -1; 0; 3\}$; $A \cup B = \{-13; -6; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 3; 8\}$; $A \cap B = \{-6; -3; -2; -1\}$. **3.** a) $\sqrt{5}$; b) $-2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$; c) 1. **4.** 300 lei. **5.** $x \in \{-4; -1; 1; 3; 4; 5; 8\}$. **6.** a) $m_a = 3$; $m_g = 1$; b) $m_a = 4$; $m_g = 2$; c) $m_a = 1$; $m_g = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **7.** a) $a = -2$; $b = 3$; b) $a = -1$; $b = -2$; c) $a = -\sqrt{3}$; $b = -2\sqrt{2}$; d) $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.